Лекція № 27

На минулій лекції почали вивчення теми «Електромагнітні хвилі». Показали, що будь-яка декартова компонента $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}$ задовольняє однорідному хвильовому рівнянню:

$$\Delta U(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0. \tag{8.6}$$

8.2. Пласкі хвилі

Нехай скалярна функція $U(\vec{r},t)$ залежить тільки від однієї з декартових координат, наприклад, від координати *x*. Хвильове рівняння для $U(x,t)$ приймає такий вигляд

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{8.7}$$

Перепишемо (8.7) так

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)U(x,t) = 0$$

та введемо нові незалежні змінні

$$\begin{cases} \xi = x - ct; \\ \eta = x + ct. \end{cases} \tag{8.8}$$

Обернені перетворення

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2}; \\ t = \dfrac{\eta - \xi}{2c}. \end{cases} \tag{8.9}$$

Частинні похідні по нових змінних:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}U(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}U(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right);$$

$$2\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}; \quad 2\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

В нових змінних хвильове рівняння для функції $U(\xi,\eta)$ приймає вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}U(\xi,\eta)=0 \tag{8.10}$$

Шукаємо загальний розв'язок рівняння (8.10) так:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)=0; \quad \frac{\partial U}{\partial\eta}=F(\eta).$$

Частинна похідна від $\frac{\partial U}{\partial\eta}$ по ξ, тому ця похідна може бути функцію тільки від η. Шукаємо вигляд $U(\xi,\eta)$:

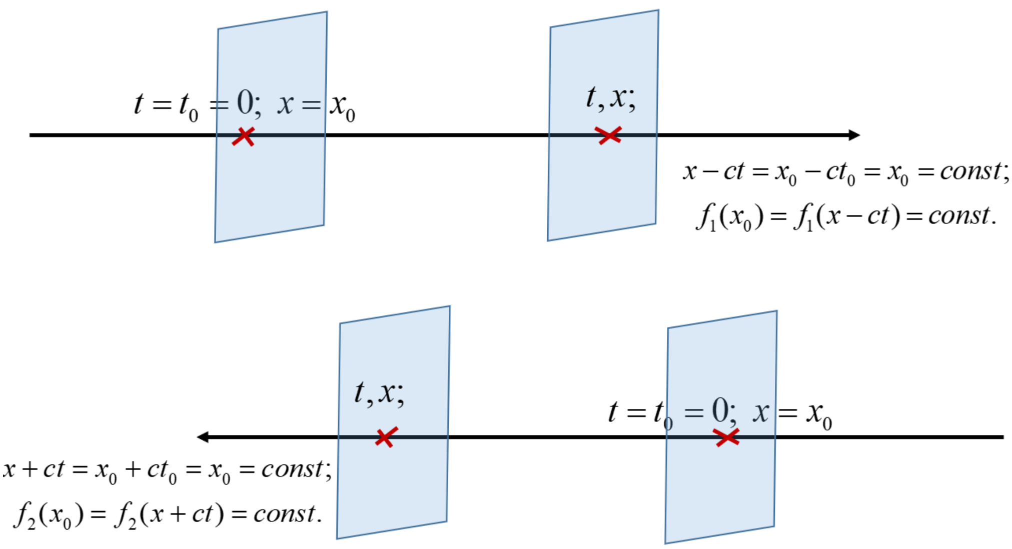
$$U(\xi,\eta)=\underbrace{\int F(\eta)d\eta}_{f_2(\eta)}+f_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2(\eta).$$

Отримали загальний розв'язок хвильового рівняння для функції $U(x,t)$:

$$U(x,t)=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{8.11}$$

Розв'язок (8.11) є суперпозицією двох збурень, які зміщуються зі швидкістю світла уздовж осі x. Функція $f_1(x-ct)$ відповідає зміщенню уздовж додатного напрямку осі x (зліва – направо), функція $f_2(x+ct)$ – уздовж від'ємного напрямку осі x (справа – наліво).

Нехай в початковий момент часу $t=t_0=0,\ x=x_0$. Значення функції $f_1(x-ct)$ є сталим для $x-ct=x_0=const$. Значення функції $f_1(x-ct)$ зміщуються вправо по осі x зі швидкістю світла: $x(t)=x_0+ct$. Так само значення функції $f_2(x+ct)$ є сталим для $x+ct=x_0=const$. Значення функції $f_2(x+ct)$ зміщуються вліво по осі x зі швидкістю світла: $x(t)=x_0-ct$. Збурення $f_1(x-ct),\ f_2(x+ct)$ називаються біжучими пласкими хвилями.



Знайдемо взаємну орієнтацію векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}$ для пласких хвиль.

Векторний потенціал складається із двох доданків $\vec{A}(x \pm ct)$. З урахуванням обраного калібрування $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, тому, очевидно, що

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x(x \pm ct) + \cancel{\frac{\partial}{\partial y} A_y(x \pm ct)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z} A_z(x \pm ct)} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x(x \pm ct) = 0.$$

Для пласкої хвилі

$$A_x(x \pm ct) = const. \qquad (8.12)$$

Шукаємо напруженості за формулами

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Можемо стверджувати, що проєкції обох напруженостей на вісь *x* дорівнюють нулю:

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0;$$

$$H_x = \frac{\partial A_z(x - ct)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x - ct)}{\partial z} = 0;$$

Проєкції векторів $\vec{E}, \vec{H}$ на напрямок розповсюдження хвилі дорівнюють нулю. Пласкі хвиля є поперечними. Нагадаємо, що напрямок розповсюдження пласкої хвилі обрали уздовж осі *x*.

З'ясуємо тепер, який кут між векторами $\vec{E}, \vec{H}$. Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(x - ct)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}(x - ct)}{\partial (x - ct)} = \frac{\partial \vec{A}(x - ct)}{\partial x} = \vec{e}_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Напруженість магнітного поля

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Згадаємо зв'язок між ортами декартових координат

$$\vec{e}_x = \left[\vec{e}_y, \vec{e}_z\right];\ \vec{e}_y = \left[\vec{e}_z, \vec{e}_x\right] = -\left[\vec{e}_x, \vec{e}_z\right];\ \vec{e}_z = \left[\vec{e}_x, \vec{e}_y\right]. \tag{8.13}$$

Наприклад,

$$\left[\vec{e}_y, \vec{e}_z\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_x.$$

$$\left[\vec{e}_x, \vec{e}_z\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{e}_y.$$

Та перепишемо останню формулу для напруженості магнітного поля так

$$\vec{H} = \left[\vec{e}_x, \vec{E}\right].$$

Отримали цю формулу з урахування (8.13) так:

$$\vec{E} = \vec{e}_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$\vec{H} = -\vec{e}_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_y}{\partial x} = \left[\vec{e}_x, \vec{e}_z\right] \frac{\partial A_z}{\partial x} + \left[\vec{e}_x, \vec{e}_y\right] \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

$$= \left[\vec{e}_x, \vec{e}_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] = \left[\vec{e}_x, \vec{E}\right].$$

Для довільного напрямку розповсюдження пласкої хвилі, яке задається одиничним вектором $\vec{n}$, збурення мають вигляд $f(\vec{r} \cdot \vec{n} \pm ct)$ напруженість магнітного поля через напруженіть електричного поля виражатиметься так

$$\vec{H} = \left[\vec{n}, \vec{E}\right].$$

Обернене перетворення

$$\vec{H} = \left[\vec{n}, \vec{E}\right];$$

$$\left[\vec{n}, \vec{H}\right] = \left[\vec{n}, \left[\vec{n}, \vec{E}\right]\right] = \vec{n} \underbrace{\left(\vec{n}, \vec{E}\right)}_{=0} - \vec{E} \underbrace{\left(\vec{n}, \vec{n}\right)}_{1} = -\vec{E};$$

$$\vec{E} = \left[\vec{H}, \vec{n}\right].$$

Зв’язок між напруженостями в пласкій хвилі є таким:

$$\vec{H} = \left[\vec{n}, \vec{E}\right]; \quad \vec{E} = \left[\vec{H}, \vec{n}\right]. \tag{8.14}$$

Модулі напруженостей в пласкій хвилі є однаковими по величині:

$$\vec{H}^2 = \left(\left[\vec{n},\vec{E}\right],\left[\vec{n},\vec{E}\right]\right) = \vec{E}^2.$$

Таким чином, в пласкій хвилі $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{n},\ E = H$.

Вектор Пойнтінга (5.32) у випадку пласкої хвилі

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\left[\vec{n},\vec{E}\right]\right] = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{n}E^2 - \vec{E}\underbrace{(\vec{E},\vec{n})}_{=0}\right) = \frac{c}{4\pi}E^2\vec{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\vec{n} =$$

$$W = \frac{c}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right).$$

Густина енергії будь-якого електромагнітного поля (див. ф-лу (5.36))

$$W = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right).$$

Для пласкої хвилі густина енергії

$$W = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) = \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2 = \frac{1}{4\pi}\vec{H}^2. \qquad (8.15)$$

Вектор Пойнтінга пласкої хвилі можна виразити через густину енергії так

$$\vec{\Pi} = cW\vec{n}. \qquad (8.16)$$

Електромагнітні хвиля переносять енергію зі швидкістю світла.

8.3. Сферичні хвилі

Розглянемо розв'язок хвильового рівняння для випадку, коли $U = U(r,t)$ – поле хвилі має сферичну симетрію. Хвильове рівняння в сферичних координатах з урахуванням того, що функція $U(r,t)$ залежить тільки від однієї із трьох сферичних координат має такий вигляд

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \qquad (8.17)$$

Для розв'язку (8.17) скористаємось співвідношенням

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rU\right).$$

та перепишемо (8.17) так

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rU\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rU\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(rU\right) = 0.$$

Введемо допоміжну функцію $rU = F(r,t)$. Звідси

$$U(r,t) = \frac{F(r,t)}{r} \tag{8.18}$$

Рівняння для $F(r,t)$

$$\frac{\partial^2 F(r,t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(r,t)}{\partial t^2} = 0.$$

співпадає з рівнянням (8.7) для пласких хвиль, тому можна відразу написати загальний розв'язок для $F(r,t)$

$$F(r,t) = f_1(r-ct) + f_2(r+ct) \tag{8.19}$$

та $U(r,t)$

$$U(r,t) = \underbrace{\frac{f_1(r-ct)}{r}}_{\text{розбіжна хвиля}} + \underbrace{\frac{f_2(r+ct)}{r}}_{\text{збіжна хвиля}}. \tag{8.20}$$

Отримали загальний розв'язок (8.17) у вигляді суперпозиції двох сферичних хвиль – розбіжної (це хвиля, що розходиться від початку координат) та збіжної (хвиля, яка з нескінченності сходиться до початку координат). Амплітуда розбіжної хвилі зменшується, як $\frac{1}{r}$, бо вихідний потік енергії розподіляється на все більшу площу.

8.5. Монохроматичні хвилі

Нехай залежність від часу у електромагнітної хвилі є такою: $U \sim \cos\omega t$ або $U \sim \sin\omega t$. Для зручності подальшого розгляду будемо формально розв'язувати рівняння для $U(\vec{r},t)$, як для комплексної функції. Це спрощує деякі перетворення, бо більш зручно при диференціювання мати справу з експонентою $\exp(i\omega t)$, а не тригонометричними функціями. В кінцевому результаті візьмему дійсну частину від розв'язку:

$$U(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(f(\vec{r})\exp(i\omega t)\right) \tag{8.21}$$

Позначення “Re” для спрощення запису проміжних викладок будемо опускати. Маємо

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f(\vec{r})\exp(i\omega t)\right) = -\omega^2\left(f(\vec{r})\exp(i\omega t)\right) = -\omega^2 U(\vec{r},t).$$

Для функції (8.21) хвильове рівняння (8.6) приймає такий вигляд

$$\Delta f(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} f(\vec{r}) = 0. \tag{8.22}$$

Рівняння (8.22) називається рівнянням Гельмгольца. Воно описує хвилевий процес, що встановився. Хвилі, які мають певну частоту називаються монохроматичними.

8.6. Пласка монохроматична хвиля

Серед біжучих хвиль важливе місце займають пласкі монохроматичні хвилі. Нехай $U(x,t) = f(x)\exp(\pm i\omega t)$. Підставляємо цей вираз в рівняння для пласкої хвилі (8.7). Рівняння для $f(x)$

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \tag{8.23}$$

є звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами другого порядку. Два лінійно незалежні частинні розв'язки його добре нам відомі: $\exp(\pm ikx)$. Ввели позначення $k = \dfrac{\omega}{c}$. Це хвильове число. Загальний розв'язок (8.7) для пласких монохроматичних хвиль, які розповсюджуються уздовж осі x

$$U(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(kx + \omega t)}. \tag{8.24}$$

Для пласкої монохроматичної хвилі довільного напрямку довільного напрямку

$$U(\vec{r},t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + Be^{i(\vec{k}\vec{r} + \omega t)}. \tag{8.25}$$

В (8.25) $\vec{k} = k\vec{n},\ k = \dfrac{\omega}{c}$ – хвильовий вектор. Ми отримали закон дисперсії пласких монохроматичних хвиль (залежність частоти від хвильового вектору) у вакуумі

$$\omega = ck. \tag{8.26}$$

Закон дисперсії є лінійним.

Нагадаємо такі поняття, як фазова та групова швидкості. Фазова швидкість – це швидкість руху фронту хвилі. Фазова швидкість визначається так:

$$\upsilon_{ф.} = \frac{\omega}{k} = c. \tag{8.27}$$

Групова швидкість – це швидкість руху групи хвиль. Визначається, як

$$\upsilon_{гр.} = \frac{d\omega}{dk} = c. \tag{8.28}$$

Фазова та групова швидкості електромагнітних хвиль у вакуумі співпадають та дорівнюють швидкості світла. Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі не залежить від частоти. Хвилевий пакет (суперпозиція пласких хвиль із різними частотами) розповсюджується без зміни форми.

Нагадаємо відомі формули для періоду T та довжини хвилі λ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \;\; \lambda = \frac{2\pi}{k}; \;\; \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \qquad (8.29)$$